DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128-384-392
УДК 515.126.83, 517.988.5

О неявной и обратной многозначных функциях в топологических пространствах

Евгений Семенович ЖУКОВСКИЙ[1] **, Жоао Пауло МУНЕМБЕ**[2]

[1] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
[2] Университет Эдуардо Мондлане
CP 257, Мозамбик, г. Мапуто, Площадь 25 июня

On the implicit and inverse many-valued functions in topological spaces

Evgeny S. ZHUKOVSKIY[1] **, Joao Paulo MUNEMBE**[2]

[1] Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
[2] Eduardo Mondlane University
Praca 25 de Junho, Maputo C P. 257, Mozambique

Аннотация. Предлагаются условия непрерывности действующих в топологических пространствах неявного многозначного отображения и обратного многозначного отображения. Для заданных отображений $f : T \times X \to Y,$ $y : T \to Y,$ где T, X, Y — топологические пространства, пространство Y хаусдорфово, рассматривается уравнение

$$f(t,x) = y(t)$$

с параметром $t \in T$ относительно неизвестного $x \in X.$ Предполагается, что для некоторого многозначного отображения $U : T \rightrightarrows X$ при всех $t \in T$ выполнено включение $f(t, U(t)) \ni y(t).$ Определяется неявное отображение $\mathfrak{R}_U : T \rightrightarrows X,$ которое сопоставляет каждому значению параметра $t \in T$ множество решений $x(t) \in U(t)$ данного уравнения. Доказано, что $\mathfrak{R}_U$ полунепрерывно сверху в точке $t_0 \in T,$ если выполнены следующие условия: при любом $x \in X$ отображение f непрерывно в точке $(t_0, x),$ отображение y непрерывно в точке $t_0,$ многозначное отображение U полунепрерывно сверху в точке t_0 и множество $U(t_0) \subset X$ компактно. Если дополнительно, при значении параметра t_0 решение уравнения единственно, то отображение $\mathfrak{R}_U$ непрерывно в точке t_0 и любое сечение этого отображения также непрерывно в точке $t_0.$ Перечисленные результаты применены к исследованию многозначного обратного отображения. Именно, для заданного отображения $g : X \to T$ рассмотрено уравнение $g(x) = y$ относительно неизвестного $x \in X.$ Получены условия полунепрерыности сверху и непрерывности отображения $\mathfrak{V}_U : T \rightrightarrows X,$ $\mathfrak{V}_U(t) = \{x \in U(t) : g(x) = t\},$ $t \in T.$

Ключевые слова: неявная функция; обратная функция; многозначное отображение; полунепрерыность сверху; параметр

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 17–01–00553-а, № 17–41–680975-р_а), Министерства образования и науки РФ (проект № 3.8515.2017/8.9) и UEM-SIDA 2017-2022 (Подпрограмма № 1.4.2: Наращивание потенциала в математике, статистике и ее приложениях).

Для цитирования: *Жуковский Е.С., Мунембе Ж.П.* О неявной и обратной многозначных функциях в топологических пространствах // Вестник российских университетов. Математика. 2019. Т. 24. № 128. С. 384–392. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128-384-392.

Abstract. The conditions of continuity of the implicit set-valued map and the inverse set-valued map acting in topological spaces are proposed. For given mappings $f : T \times X \to Y$, $y : T \to Y$, where T, X, Y are topological spaces, the space Y is Hausdorff, the equation

$$f(t, x) = y(t)$$

with the parameter $t \in T$ relative to the unknown $x \in X$ is considered. It is assumed that for some multi-valued map $U : T \rightrightarrows X$ for all $t \in T$ the inclusion $f(t, U(t)) \ni y(t)$ is satisfied. An implicit mapping $\mathfrak{R}_U : T \rightrightarrows X$, which associates with each value of the parameter $t \in T$ the set of solutions $x(t) \in U(t)$ of this equation. It is proved that $\mathfrak{R}_U$ is upper semicontinuous at the point $t_0 \in T$, if the following conditions are satisfied: for any $x \in X$ the map f is continuous at (t_0, x), the map y is continuous at t_0, a multi-valued map U is upper semicontinuous at the point t_0 and the set $U(t_0) \subset X$ is compact. If, in addition, with the value of the parameter t_0, the solution to the equation is unique, then the map $\mathfrak{R}_U$ is continuous at t_0 and any section of this map is also continuous at t_0. The listed results are applied to the study of a multi-valued inverse mapping. Namely, for a given map $g : X \to T$ we consider the equation $g(x) = y$ with respect to the unknown $x \in X$. We obtain conditions for upper semicontinuity and continuity of the map $\mathfrak{V}_U : T \rightrightarrows X$, $\mathfrak{V}_U(t) = \{x \in U(t) : g(x) = t\}$, $t \in T$.

Keywords: implicit function; inverse function; multi-valued mapping; upper semicontinuity; parameter

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects no. 17–01–00553-a, no. 17–41–680975-p_a), Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 3.8515.2017/8.9) and UEM-SIDA 2017-2022 (Subprogramme № 1.4.2: Capacity Building in Mathematics, Statistics and Its Applications).

For citation: Zhukovskiy E.S., Munembe M.J. O neyavnoj i obratnoj mnogoznachnyh funktsiyah v topologicheskih prostranstvah [On the implicit and inverse many-valued functions in topological spaces]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2019, vol. 24, no. 128, pp. 384–392. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128-384-392. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Пусть заданы непустые множества T, X, Y и определены отображения $f : T \times X \to Y$, $y : T \to Y$. Рассмотрим уравнение

$$f(t, x) = y(t) \tag{0.1}$$

с параметром $t \in T$ относительно неизвестного $x \in X$. Пусть для любого $t \in T$ решение $x \in X$ уравнения (0.1) существует. Отображение, сопоставляющее точке $t \in T$ множество решений этого уравнения, называют (см. [1, п. 1.1.10]) *неявным отображением* или *неявной функцией*. Исследованию условий существования и свойств неявной функции посвящена многочисленная литература, эти результаты находят применения в анализе, исследовании различных классов функциональных уравнений и включений, в приложениях (см, например, книгу [2], статью [3] и имеющуюся там библиографию).

В частном случае, когда $Y = T$, $y(t) \equiv t$ и значение $f(t, x)$ не зависит от t, то есть $f(t, x) \equiv g(x)$, уравнение (0.1) принимает вид

$$g(x) = t. \tag{0.2}$$

Отображение, сопоставляющее точке $t \in T$ множество решений уравнения (0.2), называют *обратным отображением* или *обратной функцией*. Известные результаты по теории обратных функций представлены, например, в книге [4], некоторые их уточнения см. в [5].

В большинстве исследований неявная и обратная функция рассматриваются в предположении, что пространства X, Y являются банаховыми, а в ряде задач — конечномерными векторными пространствами. Здесь мы предполагаем, что пространства T, X, Y топологические, и исследуем свойства непрерывности многозначных неявного и обратного отображений.

1. Постановка задачи

Пусть заданы топологические пространства T, X, Y. В произведении $X \times T$ полагаем, что задана стандартная топология, т. е. открытым является объединение произведений открытых множеств из X и T. Пусть определены отображения $g : T \to Y$, $f : T \times X \to Y$, $y : T \to Y$ и многозначное отображение $U : T \rightrightarrows X$ (под многозначным отображением понимается отображение, сопоставляюшее каждому аргументу непустое множество).

Напомним определение свойств полунепрерывности сверху и снизу многозначного отображения (подробнее сведения о полунепрерывных отображениях см., например, в [1, п. 1.2.2], [6, §2.3]). Многозначное отображение U называют *полунепрерывным сверху в точке* $t_0 \in T$, если для любого открытого множества $V \subset X$ такого, что $U(x_0) \subset V$, существует окрестность $\mathcal{B}_T(t_0)$ точки t_0, для которой выполнено соотношение

$$\forall t \in \mathcal{B}_T(t_0) \;\; U(t) \subset V.$$

Многозначное отображение U называют *полунепрерывным снизу в точке* $t_0 \in T$, если для любого открытого множества $V \subset Y$ такого, что $U(t_0) \cap V \neq \emptyset$, существует окрестность $\mathcal{B}_T(t_0)$ точки t_0, для которой выполнено соотношение

$$\forall t \in \mathcal{B}_T(t_0) \;\; U(t) \cap V \neq \emptyset.$$

Отображение, полунепрерывное сверху и снизу в точке t_0, называют *непрерывным в этой точке.* Если U является полунепрерывным сверху (полунепрерывным снизу, непрерывным) в любой точке, то говорят, что данное многозначное отображение *полунепрерывно сверху* (*полунепрерывно снизу*, *непрерывно*).

Рассмотрим уравнение (0.1) Будем предполагать, что при каждом значении параметра $t \in T$ уравнение (0.1) имеет решение, принадлежащее множеству $U(t)$, то есть справедливо соотношение

$$\forall t \in T \;\; f(t, U(t)) \ni y(t). \tag{1.1}$$

Определим неявное отображение, то есть многозначное отображение

$$\mathfrak{R}_U : T \rightrightarrows X, \;\; \mathfrak{R}_U(t) = \{x \in U(t) : \; f(t, x) = y(t)\} \;\; \forall t \in T. \tag{1.2}$$

Нас будут интересовать условия полунепрерывности сверху, снизу и непрерывности этого отображения.

Также мы рассмотрим уравнение (0.2) в предположении, что

$$\forall t \in T \quad g(U(t)) \ni t. \tag{1.3}$$

Нас будут интересовать свойства обратного отображения — многозначного отображения, определяемого соотношением

$$\mathfrak{V}_U : T \rightrightarrows X, \quad \mathfrak{V}_U(t) = \{x \in U(t) :\ g(x) = t\} \quad \forall t \in T. \tag{1.4}$$

2. Неявная функция

Везде далее предполагаем, что топологическое пространство Y является хаусдорфовым. Пусть задана точка $t_0 \in T$. Сформулируем условия полунепрерывности сверху в этой точке неявного отображения.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены следующие условия: при любом $x \in X$ отображение $f : T \times X \to Y$ непрерывно в точке (t_0, x), отображение $y : T \to Y$ непрерывно в точке t_0, многозначное отображение $U : T \rightrightarrows X$ полунепрерывно сверху в точке t_0, множество $U(t_0) \subset X$ компактно и имеет место включение (1.1).*

Тогда определенное формулой (1.2) многозначное отображение $\mathfrak{R}_U : T \rightrightarrows X$ полунепрерывно сверху в точке t_0 и множество $\mathfrak{R}_U(t_0)$ замкнуто в пространстве X.

Доказательство. Пусть для направления $\{x_\alpha\}$, где $x_\alpha \in \mathfrak{R}_U(t_0)$ (α — элемент некоторого упорядоченного, направленного по возрастанию множества A) имеет место сходимость по Муру – Смиту $x_\alpha \to x \in X$ (подробнее об используемых в данном доказательстве топологических понятиях в терминах сходимости направлений см., например, [7, гл. I, п. 2.6, 2.7]). Тогда $(x_\alpha, t_0) \to (x, t_0) \in T \times X$ и, в силу непрерывности отображения f в точке (t_0, x), имеем

$$y(t_0) = f(t_0, x_\alpha) \to f(t_0, x).$$

Поскольку в хаусдорфовом пространстве Y предел единственный, получаем

$$y(t_0) = f(t_0, x).$$

Таким образом, множество $\mathfrak{R}_U(t_0)$ замкнуто в X.

Пусть многозначное отображение $\mathfrak{R}_U$ не является полунепрерывным сверху в точке t_0. Тогда существует открытое множество $\widetilde{V} \subset X$ такое, что $\mathfrak{R}_U(t_0) \subset \widetilde{V}$ и в любой окрестности $\mathcal{B}_T(t_0)$ точки t_0 находится точка $t \in \mathcal{B}_T(t_0)$, для которой существует $x \in \mathfrak{R}_U(t)$, $x \notin \widetilde{V}$.

Определим множество $\widetilde{U}^0 = U(t_0) \setminus \mathfrak{R}_U(t_0)$. Пусть элементами множества A являются наборы произвольных окрестностей $\mathcal{B}_T(t_0)$ и $\mathcal{B}_X(x)$, $x \in \widetilde{U}^0$. Определим на множестве A порядок, полагая для его элементов $\alpha, \alpha' \in A$,

$$\alpha = \{\mathcal{B}_T^\alpha(t_0),\ \mathcal{B}_X^\alpha(x)\ \forall x \in \widetilde{U}^0\}, \quad \alpha' = \{\mathcal{B}_T^{\alpha'}(t_0),\ \mathcal{B}_X^{\alpha'}(x)\ \forall x \in \widetilde{U}^0\}$$

выполненным неравенство $\alpha \succeq \alpha'$, если $\mathcal{B}_T^{\alpha}(t_0) \subset \mathcal{B}_T^{\alpha'}(t_0)$ и $\mathcal{B}_X^{\alpha}(x) \subset \mathcal{B}_X^{\alpha'}(x)$ при любом $x \in \widetilde{U}^0$. Множество A является упорядоченным по возрастанию, так как для любых $\alpha, \alpha' \in A$ можем определить

$$\beta = \{\mathcal{B}_T^{\alpha}(t_0) \cap \mathcal{B}_T^{\alpha'}(t_0),\ \mathcal{B}_X^{\alpha}(x) \cap \mathcal{B}_X^{\alpha'}(x)\ \forall x \in \widetilde{U}^0\},$$

для которого выполнено $\beta \succeq \alpha,\ \beta \succeq \alpha'$.

Определим направления $\{\tau_\alpha\} \subset T,\ \{v_\alpha\} \subset X,\ \{u_\alpha\} \subset X$ $(\alpha \in A)$ следующим образом. Для произвольного $\alpha = \{\mathcal{B}_T^{\alpha}(t_0),\ \mathcal{B}_X^{\alpha}(x)\ \forall x \in \widetilde{U}\} \in A$ обозначим

$$V^\alpha = \Big(\bigcup_{x \in \widetilde{U}^0} \mathcal{B}_X^{\alpha}(x)\Big) \bigcup \widetilde{V}.$$

Множество V^α открыто и $U(t_0) \subset V^\alpha$. В силу полунепрерывности сверху в точке t_0 отображения U существует окрестность $\mathfrak{V}^\alpha \subset \mathcal{B}_T^{\alpha}(t_0)$ точки t_0 такая, что $U(t) \subset V^\alpha$ при всех $t \in \mathfrak{V}^\alpha$. Кроме того, как показано выше, существует $\tau_\alpha \in \mathfrak{V}^\alpha$ и существует $v_\alpha \in \mathfrak{R}_U(\tau_\alpha)$ такой, что $v_\alpha \notin \widetilde{V}$. Но так как $v_\alpha \in V^\alpha$, для некоторого $u_\alpha \in \widetilde{U}^0$ выполнено $v_\alpha \in \mathcal{B}_X^{\alpha}(u_\alpha)$. Итак, направления $\{\tau_\alpha\}, \{v_\alpha\}, \{u_\alpha\}$ определены.

В силу компактности множества $U(t_0)$ направление $\{u_\alpha\}$ имеет предельную точку $u \in U(t_0)$, то есть направление $\{u_\alpha\}$ часто встречается с любой окрестностью $\mathcal{B}_X(u)$ точки u:

$$\forall \alpha \in A\ \exists \alpha' = \{\mathcal{B}_T^{\alpha'}(t_0),\ \mathcal{B}_X^{\alpha'}(x)\ \forall x \in \widetilde{U}\} \in A\ \ \alpha' \succeq \alpha,\ \ u_{\alpha'} \in \mathcal{B}_X(u).$$

Покажем, что направление $\{v_\alpha\}$ часто встречается с любой окрестностью точки u. Для произвольной окрестности $\mathcal{B}_X(u)$ точки u определим $\alpha_0 \in A$, для которого $\mathcal{B}_X^{\alpha_0}(x) \subset \mathcal{B}_X(u)$ при всех $x \in \mathcal{B}_X(u)$. Существует $\alpha' \succeq \alpha_0$ такое, что $u_{\alpha'} \in \mathcal{B}_X(u)$. По определению направлений $\{\tau_\alpha\}, \{v_\alpha\}, \{u_\alpha\}$ имеем

$$v_{\alpha'} \in \mathfrak{R}_U(\tau_{\alpha'}),\ \ v_{\alpha'} \in \mathcal{B}_X^{\alpha'}(u_{\alpha'}) \subset \mathcal{B}_X^{\alpha_0}(u_{\alpha'}) \subset \mathcal{B}_X(u).$$

Таким образом, существует поднаправление $\{\widetilde{v}_\delta,\ \delta \in D\}$, сходящееся к u. Определим соответствующее поднаправление $\{\widetilde{\tau}_\delta,\ \delta \in D\}$ направления $\{\tau_\alpha\}$ следующим образом. Пусть $\alpha_0 = \{\mathcal{B}_T^{\alpha_0}(t_0) = T,\ \mathcal{B}_X^{\alpha_0}(x) = X\ \forall x \in \widetilde{U}\} \in A$. Существует такой $\delta_0 \in D$, что для любого $\delta \succeq \delta_0$ найдется $\alpha \in A$, $\alpha \succeq \alpha_0$, удовлетворяющий соотношению $\widetilde{v}_\delta = v_\alpha$. Для таких же индексов δ, α положим $\widetilde{\tau}_\delta = \tau_\alpha$. Так как направление $\{\tau_\alpha\}$ сходится к t_0, то его соответствующее поднаправление $\{\widetilde{\tau}_\delta,\ \delta \in D\}$ сходится к t_0. Из равенства $f(\widetilde{\tau}_\delta, \widetilde{v}_\delta) = y(\widetilde{\tau}_\delta)$ вследствие непрерывности отображений f и y и единственности предела в хаусдорфовом пространстве Y получаем $f(t_0, u) = y(t_0)$, то есть $u \in \mathfrak{R}_U(t_0)$. Однако, так как $\widetilde{v}_\delta \notin \widetilde{V}$ при любом $\delta \in D$, должно выполняться соотношение $u \notin \widetilde{V}$, которое противоречит включению $u \in \mathfrak{R}_U(t_0)$. Итак доказано, что многозначное отображение $\mathfrak{R}_U$ полунепрерывно сверху в точке t_0. □

Следствие 2.1. *Пусть выполнены следующие условия: отображения* $f : T \times X \to Y$ *и* $y : X \to Y$ *непрерывны, многозначное отображение* $U : T \rightrightarrows X$ *полунепрерывно сверху, при любом* $t \in T$ *множество* $U(t) \subset X$ *компактно и имеет место соотношение* (1.1).

Тогда определенное формулой (1.2) многозначное отображение $\mathfrak{R}$ *полунепрерывно сверху и для всех* $t \in T$ *имеет образами замкнутые множества* $\mathfrak{R}(t)$.

Доказательство. В условиях этого утверждения выполнены предположения теоремы 2.1 для любой точки $t_0 \in T$. $\square$

Следствие 2.2. *Пусть пространство* X *компактно и выполнены условия: отображения* $f : T \times X \to Y$ *и* $y : X \to Y$ *непрерывны и при любом* $t \in T$ *выполнено соотношение* $f(t, X) \ni y(t)$.

Тогда многозначное отображение

$$\mathfrak{R} : T \rightrightarrows X, \quad \mathfrak{R}(t) = \{x \in X : \ f(t, x) = y(t)\} \quad \forall t \in T,$$

полунепрерывно сверху и для всех $t \in T$ *имеет образами замкнутые множества* $\mathfrak{R}(t)$.

Доказательство вытекает из следствия 2.1, если положить $U(t) = X$ при любом $t \in T$. $\square$

Следующий пример иллюстрирует существенность условия компактности множества $U(t)$ в теореме 2.1.

Пример 2.1. Пусть $T = X = Y = \mathbb{R}$ (полагаем, что в $\mathbb{R}$ задана “обычная” топология). Для любых $t, x \in \mathbb{R}$ положим $f(t, x) = (tx - 1)x$, $y(t) = 0$, $U(t) = \mathbb{R}$. Функции f, y непрерывны, многозначное отображение U непрерывно (следовательно, полунепрерывно сверху). Таким образом, справедливы все условия теоремы 2.1 кроме компактности значений $U(t)$ многозначного отображения U. Множеством решений уравнения (0.1) является

$$\mathfrak{R}(t) = \{0, t^{-1}\} \text{ при } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \mathfrak{R}(t) = \{0\} \text{ при } t = 0.$$

Но это многозначное отображение $\mathfrak{R} : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ не является полунепрерывным сверху в точке $t = 0$.

Аналогичное теореме 2.1 утверждение о полунепрерывности снизу многозначного отображения $\mathfrak{R}_U : T \rightrightarrows X$ в случае полунепрерывности снизу и даже непрерывности отображения $U : T \rightrightarrows X$ оказывается неверным. Приведем соответствующий пример.

Пример 2.2. Пусть $T = [0, 1]$, $X = Y = \mathbb{R}$ (с “обычной” топологией), функции $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y : [0, 1] \to \mathbb{R}$, и многозначное отображение $U : [0, 1] \rightrightarrows \mathbb{R}$ заданы соотношениями: $f(t, x) = x + t$ при $x \in (-\infty, 1]$ и $f(t, x) = 2 - x + t$ при $x \in (1, \infty)$, $y(t) \equiv 0$, $U(t) \equiv [0, 3]$. Очевидно, функции f, y непрерывны, многозначное отображение U непрерывно и имеет компактные значения. В данном случае множеством решений уравнения (0.1) является

$$\mathfrak{R}_U(t) = \{2 + t\} \text{ при } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \mathfrak{R}_U(t) = \{0, 2 + t\} \text{ при } t = 0.$$

Это многозначное отображение не является полунепрерывным снизу в точке $t = 0$.

Если значением многозначного отображения $\mathfrak{R}_U : T \rightrightarrows X$ в точке t_0 является одноэлементное множество, то свойства полунепрерывности сверху и непрерывности точке t_0 равносильны. Кроме того, если множество $\mathfrak{R}(t_0)$ состоит лишь из одного элемента, то любое сечение (то есть отображение $\kappa : T \to X$ такое, что $\kappa(t) \in \mathfrak{R}(t)$ при всех $t \in T$) полунепрерывного в точке t_0 многозначного отображения $\mathfrak{R}_U$ является отображением, непрерывным в этой точке (что прямо следует из определения полунепрерывности сверху). Таким образом, получаем следующее утверждение.

Следствие 2.3. *Пусть выполнены предположения теоремы 2.1 и справедливо соотношение*

$$\forall x, x' \in U(t_0) \;\; f(t_0, x) = y(t_0), \;\; x' \neq x \;\Rightarrow\; f(t_0, x') \neq y(t_0). \tag{2.1}$$

Тогда определенное формулой (1.2) многозначное отображение $\mathfrak{R}_U : T \rightrightarrows X$ непрерывно в точке t_0 и множество $\mathfrak{R}_U(t_0)$ состоит ровно из одного элемента. Кроме того, любое сечение многозначного отображения $\mathfrak{R}_U$ будет отображением, непрерывным в точке t_0.

Заметим, что условие (2.1) очевидно выполнено в случае, когда сужение отображения $f(t_0, \cdot)$ на множество $U(t_0)$ инъективно. Соответственно, если при любом $t \in T$ выполнены предположения теоремы 2.1 и, кроме того, сужение отображения $f(t, \cdot)$ на множество $U(t)$ является инъективным, то "однозначное" неявное отображение

$$t \in T \;\mapsto\; x \in U(t) : \, f(t, x) = y(t)$$

(как отображение $T \to X$) будет непрерывным.

3. Обратная функция

Поскольку уравнение (0.2) является частным случаем уравнения (0.1), из результатов о неявной функции можно получить соответствующие утверждения об обратной функции.

Будем предполагать, что топологическое пространство T является хаусдорфовым.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены следующие условия: многозначное отображение $U : T \rightrightarrows X$ полунепрерывно сверху в точке $t_0 \in T$, множество $U(t_0) \subset X$ компактно, отображение $g : X \to T$ непрерывно и выполнено включение (1.3).*

Тогда определенное формулой (1.4) многозначное отображение $\mathfrak{V}_U : T \rightrightarrows X$ полунепрерывно сверху в точке t_0 и множество $\mathfrak{V}_U(t_0)$ замкнуто в пространстве X.

Доказательство. Это утверждение вытекает из теоремы 2.1, если положить $Y = T$, $y(t) \equiv t$ и $f(t, x) \equiv g(x)$. Как отмечено выше, уравнение (0.1) тогда принимает вид (0.2), а многозначное отображение $\mathfrak{R}_U : T \rightrightarrows X$ "превращается" в отображение $\mathfrak{V}_U : T \rightrightarrows X$. □

Используя приведенные выше сведения об отображениях, имеющих в заданной точке значением одноэлементное множество, сформулируем условия непрерывности обратной функции.

Следствие 3.4. *Пусть выполнены предположения теоремы 3.2 и справедливо соотношение*

$$\forall x, x' \in U(t_0) \quad g(x) = t_0, \quad x' \neq x \;\Rightarrow\; g(x') \neq t_0. \tag{3.1}$$

Тогда определенное формулой (1.4) многозначное отображение $\mathfrak{V}_U : T \rightrightarrows X$ непрерывно в точке t_0 и множество $\mathfrak{V}_U(t_0)$ состоит ровно из одного элемента. Кроме того, любое сечение многозначного отображения $\mathfrak{V}_U$ будет отображением, непрерывным в точке t_0.

Условие (3.1) очевидно выполнено в случае, когда сужение отображения g на множество $U(t_0)$ инъективно. Соответственно, если при любом $t \in T$ выполнены предположения теоремы 3.2 и, кроме того, сужение отображения g на множество $U(t)$ является инъективным, то "однозначное" неявное отображение

$$t \in T \;\mapsto\; x \in U(t) : \; g(x) = t$$

(как отображение $T \to X$) будет непрерывным.

Список литературы

[1] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений*, 2-е изд., ЛИБРОКОМ, М., 2011, 224 с. [Yu. G. Borisovich, B. D. Gelman, A. D. Mishkis, V. V. Obuhovskii, *Vvedenie v Teoriyu Mnogoznachnih Otobrajenii i Differencialnih Vklyuchenii*, 2 ed., LIBROKOM, Moscow, 2011 (In Russian), 224 pp.]

[2] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979. [V. M. Alekseev, V. M. Tihomirov, S. V. Fomin, *Optimal'noe Upravlenie*, Nauka, Moscow, 1979 (In Russian)].

[3] А. В. Арутюнов, "Теорема о неявной функции без априорных предположений нормальности", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46**:2 (2006), 205–215; англ. пер.:A. V. Arutyunov, "An implicit function theorem without a priori assumptions about normality", *Comput. Math. Math. Phys.*, **46**:2 (2006), 195–205.

[4] A. L. Dontchev, R. T. Rockafellar, *Implicit Functions and Solution Mappings. A View from Variational Analysis*, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, Springer, New York, 2009.

[5] С. Е. Жуковский, Ч. Т. Нгок, "Существование обратной функции в окрестности нерегулярного значения", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **24**:126 (2019), 141–149 crossref. [S. E. Zhukovskiy, T. T. Ngok, "Existence of inverse function in a neighbourhood of a critical value", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **24**:126 (2019), 141–149 (In Russian) crossref].

[6] А. В. Арутюнов, *Лекции по выпуклому и многозначному анализу*, Физматлит, М., 2014. [A. V. Arutyunov, *Lectures on convex and multivalued analysis*, Fizmatlit, Moscow, 2014 (In Russian)].

[7] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1984, 752 с. [L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Funktsional'nyj Analiz*, Nauka, Moscow, 1984 (In Russian), 752 pp.]

Информация об авторах

Жуковский Евгений Семенович, доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-исследовательского института математики, физики и информатики. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: zukovskys@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4460-7608

Мунембе Жоао Пауло, заместитель декана по последипломному образованию. Университет Эдуардо Мондлане, Мапуто, Мозамбик. E-mail: jmunembe3@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0380-6734

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Жуковский Евгений Семенович
E-mail: zukovskys@mail.ru

Поступила в редакцию 17 сентября 2019 г.
Поступила после рецензирования 14 ноября 2019 г.
Принята к публикации 29 ноября 2019 г.

Information about the authors

Evgeny S. Zhukovskiy, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Director of the Research Institute of Mathematics, Physics and Informatics. Derzhavin Tambov State University, Tambov, the Russian Federation. E-mail: zukovskys@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4460-7608

Joao Paulo Munembe, Deputy Deen for Postgraduate Studies. Eduardo Mondlane University, Maputo, Mozambique. E-mail: jmunembe3@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0380-6734

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Evgeny S. Zhukovskiy
E-mail: zukovskys@mail.ru

Received 17 September 2019
Reviewed 14 November 2019
Accepted for press 29 November 2019